TD Microéconomie, structures de marché et comportements statégiques,

Correction dossier 3

Mickael Sixdenier

Version : 5 avril 2023

Exercice 1. Dilemme du prisonnier

Données de l'énoncé,
Deux individus - Interrogatoires séparés - Choix possibles : dénoncer, se taire - Peine associée à chaque choix.

1) Structure du jeu,

Le *dilemme du prisonnier* est i) un **jeu non-coopératif** ; ii) avec **2 joueurs** ayant chacun ; iii) des **stratégies** avec des **gains/pertes associés** à leur mise en place. Il a été formulé dans le domaine de la *Théorie des Jeux* (branche des mathématiques appliquées à l'analyse économique qui étudie les interactions stratégiques entre individus appelés joueurs et les conséquences qui en découlent) par Albert W. Tucker en 1950.

Pour décrire la structure d'un jeu on a plusieurs dimensions à prendre en compte,

1. Le nombre de joueurs ($J_i \in J$) $\overset{\text{Dans notre cas}}{\longrightarrow}$ **2 joueurs** : J_1 et J_2 ;
2. Le nombre de stratégies ($s_k \in S$) $\longrightarrow$ **2 stratégies** : s_1 dénoncer ; s_2 se taire ;
3. Le nombre d'issues $\longrightarrow$ **4 issues** : {J_1 dénonce ; J_2 dénonce} ou {J_1 dénonce ; J_2 se tait} ou {J_1 se tait ; J_2 dénonce} ou {J_1 se tait ; J_2 se tait} ;

   N.B. : soit J l'ensemble définissant les joueurs, et S l'ensemble définissant les stratégies. Le nombre d'issues possibles sera donnée par le nombre de stratégies élevé à la puissance du nombre de joueurs. Autrement dit, $\text{Card}(S)^{\text{Card}(J)}$. Exemple : dans un jeu à 3 joueurs, J = {J_1 ; J_2 ; J_3} et 2 stratégies, S = {s_1 ; s_2}, on aura $3^2 = 9$ issues.

4. Les règles du jeu,
   (a) La (non-)répétition $\longrightarrow$ **Jeu statique**. Il n'y a qu'un seul tour, le jeu n'est pas répété ;
   (b) La (non-)simultanéité $\longrightarrow$ **La stratégie adverse jouée est inconnue** ici.

Les **éléments 1 à 4.(a)** consituent l'**information complète** pour les joueurs. L'**élément 4(b)** consitue une **information imparfaite** : élément d'incertitude.

2) Stratégie dominante/dominée,

Définition : Si quel que soit l'ensemble de stratégies jouées par les autres joueurs, **le gain procuré par s_k pour J_i est toujours supérieur** (resp. inférieur) au gain procuré par la mise en oeuvre de toute autre stratégie s'_k (différente de s_k), alors la **stratégie s_k est dominante** (resp. dominée).

Dans notre contexte à 2 joueurs et 2 stratégies (dénoncer/se taire), on pourra dire par exemple que "dénoncer" est une stratégie dominante pour le joueur 1 si et seulement si cette stratégie rapporte plus de gain que "se taire" pour ce joueur, **indépendamment** de ce que le joueur 2 choisira de faire. Pour qu'une telle situation soit possible il faut que le joueur 1 ait une **incitation à la dénonciation : ici, une remise de peine**.

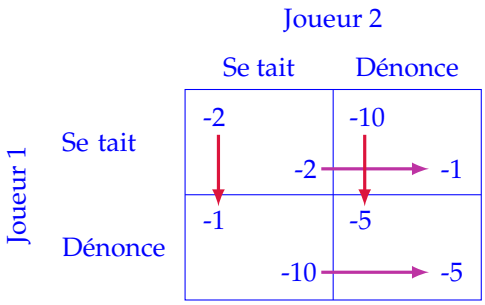
3) Matrice des gains,

La matrice des gains/paiements est une **représentation sous forme de tableau des paiements associés à toute issue pour chacun des joueurs**.

La table 1 ci-dessous représente un exemple de paiements possible caractérisant le dilemme du prisonnier : **la stratégie dominante de ce jeu simultané non-coopératif étant de dénoncer l'autre**. Pour voir ça, **on regarde comment évolue les paiements d'un selon les stratégies qu'il joue, le tout en considérant la stratégie de son adversaire fixée ! On fait ce raisonnement en fixant une à une l'ensemble des stratégies du joueur adversaire.**

E.g., les flèches rouges représentent le passage de la stratégie 1 (se taire) à la stratégie 2 (dénoncer) de la part du J_2. On voit que les paiements du J_2 passent de -2 à -1 si l'on fixe la stratégie du J_1 à se taire : J_2 est gagnant à dénoncer. De la même manière, si l'on considère que J_1 va dénoncer, J_2 à intérêt à dénoncer également puisqu'il passera de -10 s'il se tait à -5 en dénoncant : **dénoncer est une stratégie dominante** pour J_1. Ce raisonnement s'applique de façon miroir à J_1.

TABLE 1 – Matrice des paiements : dilemme du prisonnier



Lecture : Le premier nombre de chaque case (nord-ouest) correspond au paiement du joueur 1 pour la stratégie correspondante. Le second chiffre de chaque case correspond au paiement du joueur 2 pour la stratégie correspondante. La couleur rouge (resp. violette) est associée au joueur 1 (resp. 2) et ses paiements en fonction de ses choix.

Les joueurs jouent leur stratégies dominante (puisqu'elle existe) et on tombe sur l'issue du jeu $\{s_1\,;\,s_1\}$ = {dénoncer ; dénoncer}. Les paiements associés sont (-5 ; -5). On parle d'**équilibre de Nash**.

4) Paradoxe de la rationalité,

Définition : On parle de **paradoxe de la rationalité** lorsque les agents se comportent de manière **individuellement rationnelle** mais que l'agrégation des choix, donc le comportement **collectif est lui irrationnel**. Autrement dit, lorsque l'*Equilibre de Nash* (EN) qui caractérise la solution individualiste du jeu, ne coïncide pas avec le concept de *Pareto optimalité* (PO). Il est possible de passer de l'EN, à une autre allocation dite Pareto optimale, de telle sorte que le bien-être d'un agent soit amélioré, sans dégradé le bien-être d'un ou plusieurs autres agents.

Classons les allocations (ici on parle des issues du jeu) selon le critère de Pareto. On prends deux allocations et on classe, et ainsi de suite. Entre l'allocation où les deux joueurs se taisent et retirent (-2 ; -2) et celle où ils dénoncent tous les deux et retirent (-5 ; -5) il est immédiat que le passage de la 2nde à la 1ère améliore le bien-être (BE) de tous le monde,

$$(-5\,;-5) \quad \sim \quad (-1\,;-10)$$

$$(-5\,;-5) \quad \sim \quad (-10\,;-1)$$

$$(-5\,;-5) \quad \overset{\text{Pareto améliorant}}{\succ} \quad (-2\,;-2)$$

On peut comparer toutes les autres issues à l'EN, elles sont toutes Paréto améliorantes : EN et allocation PO diffèrent, le jeu aboutit au paradoxe de la rationalité. **Il serait collectivement rationel qu'aucun ne dénonce l'autre**. L'ajout d'une notion de **confiance** dans ce jeu ne modifie aucun des aspect de la structure définie à la question 1. : l'**équilibre est inchangé**.

5) Innocents ou coupables,

Le fait que les individus soient innocents ou coupables n'a **aucune influence sur la structure du jeu** : le système de prime à la dénonciation **peut mener à une dénonciation mutuelle d'innocents**.

Exercice 2. Dilemme du prisonnier : variante

Données de l'énoncé,

		Joueur 2 : Se tait	Joueur 2 : Dénonce
Joueur 1	Se tait	0 ; -2	-10 ; -1
Joueur 1	Dénonce	-1 ; -10	-5 ; -5

1) Optima de Pareto,

Selon le critère de Pareto on peut classer les issues deux à deux de la façon suivante. **Dès qu'une issue est Pareto dominée, on l'élimine définitivement**,

$$(0\,;-2) \sim (-10\,;-1)$$
$$(0\,;-2) \succ (-1\,;-10)$$
$$(0\,;-2) \succ (-5\,;-10)$$

Les deux **issues PO** sont **(0 ; -2)** et **(-10 ; -1)**.

2) Stratégies dominantes,

L'unique différence dans cette variante est le gain qui est devenu 0 au lieu de -2 pour J_1 s'il se tait quand J_2 se tait également. Cette variation renverse le sens de la flèche par rapport à la table 1 : **dénoncer n'est plus dominante pour J_1**. Autrement dit, lorsque l'on fixe la stratégie de J_2 à "se taire", J_1 a intérêt à jouer "se taire". **La prime la dénonciation n'existe plus ici**. La table actualisée devient,

TABLE 2 – Matrice des paiements : variante dilemme du prisonnier

		Joueur 2 : Se tait	Joueur 2 : Dénonce
Joueur 1	Se tait	-0 ; -2	-10 ; -1
Joueur 1	Dénonce	-1 ; -10	-5 ; -5

3) Explication de la variation,

- ➢ J_1 a tiré un plus grand avantage du crime que J_2 ? ⟶ FAUX. Le crime n'avantage pas différemment les joueurs ;
- ➢ Le procureur, qui décide des primes à la dénonciation, est le frère de J_1 et a fait en sorte que, dans le cas où aucun joueur ne dénonce l'autre, J_1 soit libre ? ⟶ VRAI. Le gain devenu 0 au lieu de -2 représente l'idée que J_1 sera désormais libre si les deux se taisent ;
- ➢ J_1 ne choisit pas rationnellement ? ⟶ FAUX. La rationalité individuelle tient toujours pour tout le monde.

4) Explication du maintient de l'équilibre,

L'EN est maintenu à l'issue (dénoncer ; dénoncer) pour laquelle les paiements associés sont (-5 ; -5) car selon l'**élimination itératives des stratégies dominées**, le raisonnement est :

Etape 1 : La stratégie "dénoncer" est toujours dominante pour J_2 mais pas pour J_1 ;

Etape 2 : J_1 élimine la possibilité de jouer "se taire" pour J_2 puisque cette stratégie est dominée pour ce joueur et il sait que J_2 jouera rationnellement ;

Etape 3 : J_1 joue rationnellement sachant que J_2 joue "dénoncer". Autrement dit, **la meilleure réponse de J_1 à la meilleure réponse de J_2 est "dénoncer"**.

5) Texte 1. Mas-Colell, Whinston et Green, *Microeconomic theory*, p.239. « Prêtez attention à la manière dont la connaissance commune des gains et de la rationalité de chacun est utilisée pour résoudre le jeu. Dans le dilemme du prisonnier, l'élimination des stratégies strictement dominées requiert seulement que chaque joueur soit rationnel. Maintenant, nous raisonnons en supposant non seulement que B est rationnel, mais que A sait que B est rationnel. (…) Alors nous pouvons ne pas nous arrêter après seulement deux itérations : nous pouvons éliminer non seulement les stratégies strictement dominées et celles qui le sont après la première élimination des stratégies strictement dominées, mais aussi toutes les stratégies qui le deviennent après l'élimination suivante des stratégies, etc. Observez que chaque élimination de stratégies rend dominées de nouvelles stratégies (…). Cependant, chaque itération requiert une connaissance toujours plus profonde par les joueurs de la rationalité des autres. Un joueur doit savoir non seulement que ses rivaux sont rationnels mais aussi qu'ils savent que lui l'est, etc. » ———————————

Le texte souligne la **différence conceptuelle de résolution entre la version initiale du dilemme du prisonnier et sa variante**. Dans la première la connaissance des gains et la rationalité individuelles suffisent à tombers sur l'EN. Dans la seconde, on suppose que chaque joueur anticipe que son adversaire agira de manière rationelle également : on parle de **connaissance commune de la rationalité** ou de **mise en abîme** (je sais qu'il sait, il sait que je sais qu'il sait, etc.). Cet ajout permet, lorsqu'il existe des **stratégies dominées**, de les **éliminer de manière itérative** (l'application de la rationalité est appliqué par répétition en plusieurs étapes - cf ci-dessus).

Exercice 3. Equilibre par élimination itérative des stratégies dominées

Données de l'énoncé,

Joueur 1 \ Joueur 2	s_{21}	s_{22}	s_{23}
s_{11}	2, 0	5, -3	2, 1
s_{12}	3, 1	4, 4	0, 3
s_{13}	1, -2	12, 0	1, 2

1) Stratégies dominantes/dominées,

Regardons les choix rationels de J_1 selon les stratégies de J_2 fixées : pour quelle stratégie s_k le gain atteint par J_1 à stratégie $s_{k'}$ de J_2 fixée (on se concentre successivement sur la colonne s_{21}, puis s_{22}, et s_{23}) ? Il alternera entre les trois stratégies selon ses croyances à propos des choix de J_2 (voir gains en rouge). **J_1 ne présente ni stratégie dominée, ni stratégie dominante**,

Joueur 1 \ Joueur 2	s_{21}	s_{22}	s_{23}
s_{11}	2, 0	5, -3	**2**, 1
s_{12}	**3**, 1	4, 4	0, 3
s_{13}	1, -2	**12**, 0	1, 2

A propos des choix de J_2 désormais, on cherche des stratégies dominantes et/ou dominée comme ci-dessus, en fixant les lignes cette fois (stratégies du J_1). Selon les choix de son adversaire, J_2 jouera soit s_{22}, soit s_{23} mais jamais s_{21}. **Cette dernière est une stratégie dominée (colonne hachurée)**,

Joueur 1 \ Joueur 2	s_{21}	s_{22}	s_{23}
s_{11}	2, 0	5, -3	2, **1**
s_{12}	3, 1	4, **4**	0, 3
s_{13}	1, -2	12, 0	1, **2**

2) Solution sous hypothèse de connaissance commune de rationalité,

J_1 intègre le fait que J_2 ne jouera jamais s_{21}. Or J_1 aurait joué s_{12} uniquement sous s_{21}. **La stratégie s_{12} est maintenant dominée dans le processus d'éliminations par itérations,**

Joueur 1 \ Joueur 2	s_{21}	s_{22}	s_{23}
s_{11}	2 ; 0	5 ; -3	**2** ; **1**
s_{12}	3 ; 1	4 ; 4	0 ; 3
s_{13}	1 ; -2	**12** ; 0	1 ; 2

J_2 sait maintenant que s_{12} n'est pas joué et **ne jouera donc pas s_{22},**

Joueur 1 \ Joueur 2	s_{21}	s_{22}	s_{23}
s_{11}	2 ; 0	5 ; -3	**2** ; **1**
s_{12}	3 ; 1	4 ; 4	0 ; 3
s_{13}	1 ; -2	12 ; 0	1 ; 2

J_1 n'a plus intérêt à jouer s_{13}. On peut éliminer cette ligne de la table,

Joueur 1 \ Joueur 2	s_{21}	s_{22}	s_{23}
s_{11}	2 ; 0	5 ; -3	**2** ; **1**
s_{12}	3 ; 1	4 ; 4	0 ; 3
s_{13}	1 ; -2	12 ; 0	1 ; 2

A ce stade, la meilleure réponse de J_2 est de jouer s_{23}. La meilleure réponse de J_1 est de jouer s_{11}, dont la meilleure réponse sera s_{23}, dont la meilleure réponse sera s_{11} : on a bien bouclé le jeu. **L'EN correspond à l'issue $\{s_{11}\,;\,s_{23}\}$ dont les gains seront (2 ; 1)**.

3) Paradoxe de la rationalité ?

Il suffit de trouver une issue qui Pareto domine l'EN. Autrement, il n'y pas de paradoxe de la rationalité. Ici on voit rapidement que les gains associés à l'issue $\{s_{12}\,;\,s_{22}\}$ **: (4 ; 4)** ou à l'issue $\{s_{12}\,;\,s_{21}\}$ **: (3 ; 1)** permettent de conclure que ces dernières **sont préférées** (au sens large, c'est-à-dire préférer ou être indifferent) **par tous les joueurs aux gains associés à l'EN : (2 ; 1)**.

Exercice 4. Equilibre de Nash

Données de l'énoncé,

Joueur 1 \ Joueur 2	s_{21}	s_{22}	s_{23}
s_{11}	3 / 6	3 / 3	1 / -8
s_{12}	7 / 3	2 / 6	1 / 5
s_{13}	-4 / 1	1 / 1	2 / 2

1) Solution du jeu,

En fixant les stratégies une à une du joueur adverse, chaque joueur jouera rationnellement au moins une fois chacune de ses propres stratégies. **Autrement dit, aucune stratégie n'est dominante ou dominée (pour chaque joueur !)**. On ne peut pas procéder à l'élimination itérative pour trouver une solution.

2) Equilibre du jeu,

Définition : Un équilibre de Nash est un **couple de stratégies** $\{s_{1k}\,;\,s_{2k'}\}$ tel que s_{1k} **est la meilleure réponse de** J_1 **à la stratégie** $s_{2k'}$ **de** J_2 **et vice-versa**.

Pour chaque joueur on trouve une meilleure réponse à chaque stratégie de l'adversaire (c'est la procédure que l'on suit avec le raisonnement de "fixation de la stratégie adverse"). Respectivement pour J_1 à gauche et J_2 à droite, on a :

Joueur 1 \ Joueur 2	s_{21}	s_{22}	s_{23}
s_{11}	3 / 6	**3** / 3	1 / -8
s_{12}	**7** / 3	2 / 6	1 / 5
s_{13}	-4 / 1	1 / 1	**2** / 2

Joueur 1 \ Joueur 2	s_{21}	s_{22}	s_{23}
s_{11}	3 / **6**	3 / 3	1 / -8
s_{12}	7 / 3	2 / **6**	1 / 5
s_{13}	-4 / 1	1 / 1	2 / **2**

On lit par exemple : la meilleure réponse de J_1 à la stratégie s_{22} de J_2 est de jouer s_{11}. Si l'on combine l'ensemble des meilleures réponses (MR) pour chaque joueur, **on remarque que** s_{13} **est la MR de** J_1 **à** s_{23} **et** s_{23} **est la MR de** J_2 **à** s_{13}. C'est la définition de l'EN. Visuellement, on voit qu'il s'agit de la seule case avec deux gains colorés lorsqu'on superpose les fonctions de MR,

Joueur 1 \ Joueur 2	s_{21}	s_{22}	s_{23}
s_{11}	3, **6**	**3**, 3	1, -8
s_{12}	**7**, 3	2, **6**	1, 5
s_{13}	-4, 1	1, 1	**2**, **2**

3) Texte 2. Mas-Colell, Whinston and Green, Microeconomic theory, p.248. « Pourquoi nous intéressons-nous à l'équilibre de Nash ? (...) Il est parfois avancé que, puisque chaque joueur peut réfléchir aux stratégies de ses adversaires, la rationalité implique que les joueurs doivent pouvoir prévoir correctement ce que joueront leurs rivaux. Bien que cet argument semble séduisant, il est faux. L'hypothèse de connaissance commune de la rationalité des joueurs et de la structure du jeu ne suffit pas à conduire les joueurs à anticiper correctement le choix des autres joueurs. » ___

- ➢ Qu'est-ce que la connaissance commune de la rationalité des joueurs et de la structure du jeu ? ⟶ Cf. **Exercice 2.5)** pour la connaissance commune de la rationalité des joueurs - Cf. **Exercice 1.1)** pour la structure du jeu.
- ➢ Dans quels cas cette hypothèse suffit-elle à anticiper le choix des autres joueurs ? Dans quels cas n'y suffit-elle pas ? ⟶ Pour anticiper le choix des autres joueurs, et ainsi aboutir à une solution rationalisable du jeu, **il doit exister des stratégies dominantes et/ou dominées** pour au moins l'un des joueurs, et ce à chaque itération du processus d'élimination. Autrement, il est possible qu'un EN existe, mais on ne peut rationaliser l'aboutissement du jeu sur cette équilibre.
- ➢ Quelles sont les conséquences de ces précisions sur la réalisation de l'équilibre de Nash ? ⟶ La réalisation de l'EN est donc dans ce dernier cas de figure, non pas fondé sur l'exercice de la rationalité individuelle et la connaissance commune de la rationalité, mais sur **des anticipations qui doivent être correctes** de la part de chaque joueur.

Exercice 5.

Données de l'énoncé,
Deux joueurs : A et B, écrivent chacun un montant sans connaître le choix de l'autre. On note $\{m_A; m_B\} \in (\mathbb{R}_+)^2$ le couple de montant. Les issues du jeu suivent deux cas de figure,

1. Les deux joueurs on écrit le même montant m, auquel cas ils partageront ce montant en 2. Gain de $\frac{m}{2}$ pour chacun ;
2. Les deux joueurs écrivent des montants différents tels que $\overline{m} > \underline{m}$. Le joueur qui a écrit $\overline{m}$ ne reçoit rien. L'autre reçoit sa mise, soit $\underline{m}$.

1) Equilibre de Nash,

En appliquant la *définition* d'un équilibre de Nash au cadre de ce jeu, on a : l'EN est un **couple de stratégies** $\{m_A; m_B\}$ tel que m_A **est la meilleure réponse de** J_A **à la stratégie** m_B **de** J_B **et vice-versa**.

2) Fonction de meilleures réponses,

On se met dans la peau d'un joueur et on se demande : "si je fixe chaque stratégie de mon adversaire, quelle sera ma meilleure réponse pour chacune d'entre elle ?".

Prenons la place du joueur A. Les stratégies de mon adversaire sont de miser un montant positif compris entre 0 (inclus) et $+\infty$,

- ➢ Si mon adversaire joue une quantité strictement positive ($m_B > 0$), j'ai intérêt à miser **un montant le plus proche du sien mais juste en dessous**. Soit ε faible mais positif, je miserai $\boldsymbol{m_A = m_B - \varepsilon}$;
- ➢ 0 étant un choix possible de la part de mon adversaire, s'il joue de cette façon, je ne gagnerai rien et lui non plus. Je suis **indifférent à jouer** $\boldsymbol{m_A \in [0; +\infty)}$.

Le jeu étant **symmétrique** (on peut intervertir les indices A et B dans l'énoncé du jeu sans rien changer à sa structure, ni ses résultats), la fonction de meilleure réponse de J_B est un miroir de celle de J_A. Ainsi, pour $i \neq k$,

$$m_i(m_k) = \begin{cases} m_k - \varepsilon & \text{si } m_k \in [0; +\infty) \\ \in [0; +\infty) & \text{si } m_k = 0 \end{cases}$$

3) Equilibre de Nash en pratique,

Il faut trouver une coïncidence de choix dans les meilleures réponses des deux joueurs, autrement dit **une paire de stratégies telle que sachant l'issue à laquelle cette paire mène, les joueurs n'aurait eu aucune stratégie rapportant plus de gain** (aucune déviation qui aurait amélioré leur situation). On procède au cas par cas pour trouver une "boucle" dans les meilleures réponse,

- ➢ **Imaginons que** $\boldsymbol{J_i}$ **joue** $\boldsymbol{m_i = 0}$. Dans ce cas J_k jouera $m_k \in [0; +\infty)$. S'il ne joue pas 0, alors la stratégie de J_i n'aura pas été la bonne : il aurait préféré jouer $m_i = m_k - \varepsilon$ pour avoir un gain strictement positif

  $\longrightarrow$ **pas de boucle dans les meilleures réponses** ;

- ➢ **Pour** $\boldsymbol{m_i > m_k > 0}$, on voit rapidement que J_i n'aura pas intérêt à jouer de la sorte puisqu'il aurait pu augmenter son gain en misant m_i plus faible que m_k

  $\longrightarrow$ **pas de boucle dans les meilleures réponses** ;

➢ **Pour $m_i = m_k = m > 0$**, les deux joueurs auraient pu augmenter leur gain ($\frac{m}{2}$) en jouant un montant un peu plus faible ($m - \varepsilon$) que celui actuellement joué. En effet, le joueur qui l'aurait fait un plus gros gain : $m - \varepsilon > \frac{m}{2}$

$\longrightarrow$ **pas de boucle dans les meilleures réponses** ;

➢ **Pour $m_i = m_k = 0$**, aucun des deux joueurs n'aurait pu augmenter son gain en déviant de sa stratégie

$\longrightarrow$ **boucle dans les meilleures réponses = EN** ;

4) Stratégie dominante, stratégie dominée,

Cf. Exercice 1.2 pour la définition.

5) Pourquoi les stratégies de l'EN sont dominées,

A l'EN, où $m_i = 0$ pour $i = \{A; B\}$, le joueur qui ne mise rien ne gagnera rien pour sûr. Quoiqu'il arrive. Or, en jouant la stratégie "complémentaire" d'**écrire un montant strictement positif $m_i > 0$** il est possible qu'il gagne quelque chose,

- ➢ Soit son adversaire propos un montant plus faible que le sien ($m_k < m_i$), auquel cas **il ne gagnera rien** (comme dans la stratégie jouée à l'équilibre) ;
- ➢ Soit son adversaire écrit un montant égal au sien ($m_k = m_i$), auquel cas **il gagnera son montant misé divisé par deux : $\frac{m_i}{2}$** ;
- ➢ Soit son adversaire écrit un montant strictement plus élevé que le sien ($m_k > m_i$), auquel cas **il gagnera son montant misé : m_i**.

On parle de **stratégie dominée au sens large**. Le joueur dispose d'autres stratégies qui, en en considérant la stratégie de son adversaire fixe, lui aurait procuré soit les mêmes gains, soit des gains plus élevés [1].

1. A la différence d'une stratégie dominée au sens stricte, où toute autre stratégie dont le joueur dispose, aurait rapporté des gains strictement plus élevés.

Exercice 6.

Données de l'énoncé,
Même contexte que précédemment avec les mises $\{m_A; m_B\} \in (\mathbb{R}_+)^2$. Les issues du jeu sont maintenant données par les fonctions de gains suivantes,

$$G(m_A) = m_A \cdot (10 - m_A - m_B)$$
$$G(m_B) = m_B \cdot (10 - m_B - m_A)$$

1) Calcul et représentation des fonctions de meilleures réponses,

On a ici une fonction de gain qui est continue, selon le couple de valeurs misées on associe un gain précis pour chaque joueur. Conceptuellement, **la meilleure réponse pour $J_{i,i\in\{A;B\}}$ sera tel qu'il maximise cette fonction de gain, à stratégie de son adversaire $J_{k,k\neq i}$ donnée.** On veut obtenir la mise d'un joueur en fonction de celle de l'autre : $m_i(m_k)$.

On applique les *conditions usuelles de maximisation*. **Le jeu est symmétrique** (on peut intervertir les indices dans les données de l'énoncé sans ne rien modifier à la structure du jeu et ses issues). La mise du joueur concerné est la variable de choix (celle par rapport à laquelle on dérive et qu'on souhaite isoler), celle de son adversaire un paramètre de la fonction (stratégie considérée fixe). Ce qui donne pour $i = \{A; B\}$, $k \neq i$,

$$\text{CPO} : G'(m_i) = 0 \Leftrightarrow 10 - 2m_i - m_k = 0 \Leftrightarrow m_i = \frac{10 - m_k}{2}$$

$$\text{CSO} : \forall m_i,\ G''(m_i) = -2 < 0$$

Les fonctions de meilleures réponses sont donc bien données par la relation ci-dessous. A noter que **la mise optimale d'un joueur décroît avec la mise de son adversaire**,

$$\boxed{m_i(m_k) = \frac{10 - m_k}{2}}$$

Graphiquement on aura en rouge pour J_A et en violet pour J_B,

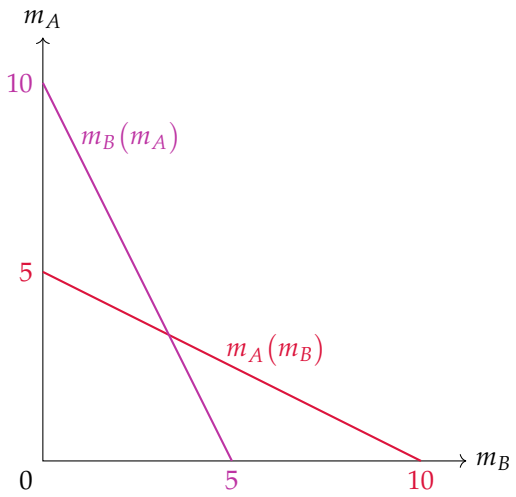


FIGURE 1 – Fonctions de meilleures réponses.

2) Equilibre de Nash,

Par définition de l'EN, **on cherche "la meilleure réponse à la meilleure réponse"**. Pour ça, on va réintroduire une des fonctions de meilleure réponse dans l'autre. Autrement dit on résoud le système d'équations suivant,

$$\begin{cases} m_A(m_B) = \dfrac{10-m_B}{2} \\ m_B(m_A) = \dfrac{10-m_A}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m_A = 5 - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{10-m_A}{2}\right) \\ m_B(m_A) = \dfrac{10-m_A}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{3}{4}m_A = 5 - \dfrac{1}{4}\cdot 10 \\ m_B(m_A) = \dfrac{10-m_A}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m_A = \dfrac{5}{2}\cdot\dfrac{4}{3} \\ m_B(m_A) = \dfrac{10-m_A}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m_A = \dfrac{10}{3} \\ m_B(m_A) = \dfrac{10-m_A}{2} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \boxed{m_A = m_B = \frac{10}{3}}$$

Cet équilibre est **représenté graphiquement par l'intersection des fonctions de réaction des deux joueurs**.

3) Texte 3. Tirole J., Théorie de l'organisation industrielle, tome 2, 1995, p.11. « La construction des fonctions de réaction dans un jeu à mouvements simultanés n'est rien de plus qu'un expédient technique à fin d'illustrations. Par définition des choix simultanés, chaque joueur choisit son action avant d'observer celle de son rival. Il n'y a donc aucune possibilité de réaction stricto sensu. Les fonctions de réaction décrivent ce que ferait un joueur s'il apprenait que la variable fixée par l'autre a changé, ce qui n'est pas le cas. Les points de la fonction de réaction autres que l'équilibre de Nash ne sont donc jamais observés. »

- ➢ Si les points des fonctions de réaction (= fonctions de meilleure réponse) autres que l'équilibre ne sont jamais observés, cela signifie-t-il que l'équilibre est toujours observé ? ⟶ Non, **l'EN est effectivement réalisé uniquement si les anticipations sont correctes** : ici, le joueur anticipe correctement sa fonction de gain et celle de son adverse. Sous cette condition uniquement le point de l'EN sera décrit. **D'autres anticipations mèneront à la réalisation d'autres points, qui ne feront pas parties des fonctions de réactions décrites comme ci-dessus**.
- ➢ Quelle difficulté apparaît si l'on considère que l'équilibre est obtenu à la suite d'un processus d'adaptation aux choix de l'autre joueur ? ⟶ On relâche l'hytothèse selon laquelle le choix de mon adversaire ne dépend pas du mien et vice-versa. **Si le processus est "adaptatif" on ne se trouve plus dans un jeu statique à une période**. Les jeux dynamiques (plusieurs périodes) existent mais peuvent être plus complexes à résoudre en pratique. Exemple : jeu du mille-pattes.

Exercice 7. Multiplicité d'équilibres de Nash

Données de l'énoncé,

Joueur 1 \ Joueur 2	s_{21}	s_{22}
s_{11}	4 ; 5	0 ; 0
s_{12}	1 ; 1	5 ; 4

1) Structure du jeu et issues préférées,

Cf. **Exercice 1.1 pour la structure de jeu à décrire**. S'il on applique le raisonnement et la définition de stratégie dominante/dominée à cette matrice de gains pour les deux joueurs on arrive à la conclusion suivante : **aucune stratégie dominée ou dominante pour aucun des deux joueurs**.

2) Equilibres de Nash et Optima de Pareto,

Si l'on applique les **raisonnements** vus aux exercices précédents, notamment **Exercice 4.2**, on obtient des fonctions de meilleures réponses telles que,

Joueur 1 \ Joueur 2	s_{21}	s_{22}
s_{11}	**4** ; **5**	0 ; 0
s_{12}	1 ; 1	**5** ; **4**

Les stratégies s_{11} et s_{21} sont toutes les deux des meilleures réponses respectives l'une de l'autre, **l'issue $\{s_{11}; s_{21}\}$: $(4; 5)$ est un EN**. De même pour **$\{s_{12}; s_{22}\}$: $(5; 4)$**. Il est clair que ces deux issues Pareto domine les issues $\{s_{11}; s_{22}\}$: $(0; 0)$ et $\{s_{12}; s_{21}\}$: $(1; 1)$. Les deux couples EN sont inclassables entre elles du point de vue du critère de Pareto : **elles sont donc toutes deux des OP**.

3) Issue du jeu,

L'issue du jeu est indéterminée : la réalisation d'un des équilibres de Nash est conditionnée à une anticipation correcte de la part des deux joueurs sur le choix d'autrui. Sur ce point d'anticipations, ils n'ont aucun fondement sur lequel se baser puisqu'il n'existe pas de stratégies dominées ou dominantes pour procéder par itération. S'ils échouent à se coordonner, **n'importe laquelle des issues peut se réaliser**.

4) Un des deux joueurs joue en premier. Son choix reste inconnu pour l'autre,

Dans ce cas de figure, **la structure du jeu reste inchangée. Les conditions de réalisation de l'un des EN et l'issue du jeu également**. On pourrait dire que le jeu est désormais séquentiel, puisque l'un des deux joue d'abord, puis l'autre. Or, l'ensemble de l'information disponible pour chacun des deux joueurs reste la même : **il y a toujours un élément d'incertitude quant au choix de l'adversaire**.

5) Modification des gains,

Joueur 1 \ Joueur 2	s_{21}	s_{22}
s_{11}	4, 15	0, 0
s_{12}	1, 1	15, 4

Ici, la modification des gains ne renverse pas les choix rationels des agents (cf. pas de modification du sens des flèches à la différence de l'Exercice 2.2). Les EN restent les mêmes et ils sont toujours des OP. **De ce point de vue, en théorie les conditions de réalisation de l'EN et l'issue du jeu restent identique.** Or en pratique, les EN deviennent très inégalitaire (l'un gagne beaucoup plus que l'autre), ce qui peut altérer les prises de décisions de chacun. Ils favoriseront peut être un peu davantage la situation où ils espèrent gagner le plus.

Exercice 8. Absence d'équilibre de Nash

Données de l'énoncé,

Joueur 1 \ Joueur 2	s_{21}	s_{22}	s_{23}
s_{11}	3 ; 6	1 ; 3	2 ; -8
s_{12}	7 ; 3	2 ; 6	1 ; 5
s_{13}	-4 ; 1	3 ; 1	1 ; 2

1) Fonctions de meilleures réponses,

En utilisant le raisonnement par fixation des stratégies de l'adversaire (cf. Exercice 4.2) on obtient le résultat suivant qui permet de déduire les **fonctions de meilleures réponses**,

Joueur 1 \ Joueur 2	s_{21}	s_{22}	s_{23}
s_{11}	3 ; 6	1 ; 3	**2** ; -8
s_{12}	**7** ; 3	2 ; 6	1 ; 5
s_{13}	-4 ; 1	**3** ; 1	1 ; 2

Joueur 1 \ Joueur 2	s_{21}	s_{22}	s_{23}
s_{11}	3 ; **6**	3 ; 3	1 ; -8
s_{12}	7 ; 3	2 ; **6**	1 ; 5
s_{13}	-4 ; 1	1 ; 1	2 ; **2**

On voit rapidement qu'il n'y a **aucune coïncidence entre les fonctions de meilleures réponses** des joueurs (qui est la définition de l'EN), donc **le jeu ne présente pas d'EN**.

2) Optima de Pareto,

Avec un classement rapide des issues selon le critère de Pareto on aura,

$$\begin{aligned}
(3;6) &\succ (3;3)\\
(3;6) &\succ (1;\text{-}8)\\
(3;6) &\sim (7;3)\\
(3;6) &\succ (2;6)\\
(3;6) &\succ (1;5)\\
(3;6) &\succ (\text{-}4;1)\\
(3;6) &\succ (1;1)\\
(3;6) &\succ (2;2)
\end{aligned}$$

Les issues avec les gains associés (3 ; 6) et (7 ;3) sont toutes les deux des OP.

➢ Peuvent-ils résulter de décisions sans coordination au préalable avec anticipations correctes ? ⟶ Non puisqu'ils ne sont pas des EN, donc pas une meilleure réponse de meilleure réponse. **Même avec des anticipations correctes, rien ne permet de mener à une issue en particulier ici**.

➢ Peuvent-ils résulter de décisions préalablement coordonnées ? ⟶ Non car ils ne sont toujours pas des EN : même en se coordonnant sur l'un des OP, **au moins l'un des joueurs aurait rationellement intérêt à dévier pour une autre stratégie**.

3) Texte 4. Mas-Colell et al. L'équilibre de Nash comme convention sociale stable. « Une manière particulière de jouer un jeu peut apparaître au cours du temps si le jeu est joué de manière répétée et si une convention sociale stable émerge. Si tel est le cas, il peut sembler évident pour tous les joueurs que cette convention sera maintenue. La convention, pour ainsi dire, devient focale. Un bon exemple est le jeu joué par les new-yorkais chaque jour. Ceux qui vont travailler à pied décident du trottoir qu'ils empruntent. Au cours du temps, une convention sociale stable est de marcher sur le trottoir de droite, convention appliquée parce que tout individu qui en dévie unilatéralement est certain d'être sévèrement piétiné. Bien sûr, il est possible qu'un jour donné, un individu décide de marcher à gauche en conjecturant que chacun prévoira soudainement que la convention changera. Cependant, il semble raisonnable de prédire que l'on restera à l'équilibre de Nash 'chacun marche à droite'. Observez que, pour qu'une issue devienne une convention sociale stable, elle doit être un équilibre de Nash. Si elle ne l'était pas, alors les agents en dévieraient aussitôt qu'elle émergerait. La notion d'équilibre comme état de repos d'un processus dynamique d'ajustement sous-tend l'usage et le traditionnel attrait des notions d'équilibre en économie. En ce sens, la justification de l'équilibre de Nash comme convention sociale stable est au plus près de la tradition théorique en économie. »

➢ Dans l'exercice précédent, si l'EN comme convention stable permet-il de prévoir une issue au jeu ? ⟶ Oui pour peu que l'on sache lequel des deux EN s'est précédemment imposé comme convention (cela s'étant initialement réalisé de manière aléatoire). On peut voir cela comme **une incitation à jouer de la manière dont le jeu à été joué jusqu'à présent** par les joueurs précédents dans les parties précédentes. Pour comprendre l'incitation, on peut imaginer que la norme sociale établie tient par un jeu de sanctions sociales implicites dès lors qu'un joueur dévie de la convention. E.g., quelqu'un qui ne se décale pas sur la droite dans les escalators pour laisser passer les plus pressés se verra recevoir une pression sociale (comme des regards insistants, effet de groupe, effet d'inertie : cela demande des efforts pour changer d'habitude) pour finir sur le côté droit s'il n'avance pas.

➢ Avec l'appui des textes 3 et 4 l'EN est,

a) une situation de compatibilité des décisions ? ⟶ **OUI.** Le *texte 3* décrit les actions comme ci-suit "chaque joueur choisit son action avant d'observer celle de son rival". On voit bien ici que l'EN qui peut en résulter suppose que les choix soient compatibles puisqu'ils n'ont pas été réalisées selon l'observation. Dans le *texte 4*, l'EN est vu comme une convention sociale qui suppose un certain accord préalable (implicite ici) donc compatibles.

b) le point d'arrivée d'un processus dynamique ? ⟶ **NON** selon J.Tirole qui conclue son raisonnement dans le *texte 3* avec cette phrase : "il n'y donc pas de réaction stricto sensu". Les choix sont réalisés conceptuellement au même moment sous incertitude. Il n'y a pas de transmission d'information qui serait possible sous séquentialité des choix. **OUI** dans le *texte 4* où l'on imagine que le jeu statique ait été joué un certain nombre de fois auparavant, pas nécéssairement avec les mêmes joueurs. Une issue, aléatoirement, pourrait devenir plus prévalente qu'une autre et être acceptée comme "convention sociale stable émerge". L'équilibre se maintient, là où une issue est imprédictible selon la structure du jeu statique.